第28卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 1
2011年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0050-05

Reifenberg 区域的一种光滑化方法

洪广浩， 王立河

(西安交通大学理学院应用数学系，西安 710049)

摘 要: Reifenberg 区域是在其边界上的任意一点和任意尺度下，都满足一种局部平坦条件的区域. 我们通过考虑磨光后的区域特征函数的上水平集的途径，提供了 Reifenberg 区域的一种光滑化方法，包括从区域的内部逼近和外部逼近.

关键词: Reifenberg 区域；磨光；水平集

分类号: **AMS**(2000) 49Q15; 35J99 **中图分类号**: O186.1; O175.25 **文献标识码**: A

1 引言

定义 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域，如果存在 $0<\delta\ll 1$ 和 $R>0$，使得对于任意的 $x\in\partial\Omega$ 和任意的 $r\in(0,R]$，都存在一个单位向量 $\vec{n}(x,r)\in\mathbb{R}^n$，使得

$$\begin{aligned}B_r(x)\ \cap\ &\big\{y\in\mathbb{R}^n:\big\langle y-(x-r\delta\vec{n}(x,r)),\,\vec{n}(x,r)\big\rangle<0\big\}\\ &\subset\ B_r(x)\cap\Omega\subset\big\{y\in\mathbb{R}^n:\big\langle y-(x+r\delta\vec{n}(x,r)),\,\vec{n}(x,r)\big\rangle<0\big\},\end{aligned}\tag{1}$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积，那么我们称 Ω 为 (δ,R)-Reifenberg 区域.

不难验证，条件 (1) 等价于

$$HD\big(\partial\Omega\cap B_r(x),\,T_{x,r}\cap B_r(x)\big)\le\delta r,\tag{2}$$

其中 $T_{x,r}$ 是过 x 点且垂直于 $\vec{n}(x,r)$ 的超平面，而

$$HD(A,B):=\max\big(\sup\{\mathrm{dist}(a,B):a\in A\},\sup\{\mathrm{dist}(b,A):b\in B\}\big)$$

是两个集合 A 和 B 之间的 Hausdorff 距离.

这种区域由 Reifenberg 在 1960 年引进[1]，该区域的边界可以是分形[2,3]，但是只要 δ 充分小，其边界局部为 $n-1$ 维拓扑圆盘[1,4,5]. 近年来，Kenig 和 Toro 研究了 Reifenberg 区域上的调和测度与 Poisson 核的性质[2,6,7]，而 Byun 和 Wang 首创了 Reifenberg 区域上的椭圆型方程的研究[8,9]. 在本文中我们通过考虑磨光后的区域特征函数的上水平集的办法，提供了 Reifenberg 区域的一种光滑化方法. 我们的结果将有助于 Reifenberg 区域上的调和分析和微分方程等方面的研究. 本文的目的是证明如下两个定理.

定理 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是 (δ,R)-Reifenberg 区域，δ 足够小，那么，存在一列光滑区域 $\{\Omega_k\}$，使得

$$HD(\Omega_k,\Omega)<4\cdot 2^{-k}R\delta,\tag{3}$$

收稿日期: 2009-04-03. **作者简介**: 洪广浩 (1979年8月生)，男，博士. 研究方向：几何测度论.

且 $\partial\Omega_k$ 的主曲率(在任意一点和任意方向上)不超过 $C2^kR^{-1}\delta$.

定理2　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是 (δ,R)-Reifenberg 区域，δ 足够小，那么存在单调递增的光滑区域 $\{\Omega_k^i\}$ 和单调递减的光滑区域 $\{\Omega_k^e\}$，使得

$$\Omega_1^i\subset\Omega_2^i\subset\cdots\subset\Omega\subset\cdots\subset\Omega_2^e\subset\Omega_1^e, \tag{4}$$

$$HD(\Omega_k^i,\Omega)<2^{-k}R, \tag{5}$$

$$HD(\Omega_k^e,\Omega)<2^{-k}R, \tag{6}$$

且 $\partial\Omega_k^i$ 和 $\partial\Omega_k^e$ 的主曲率(在任意一点和任意方向上)不超过 $C2^kR^{-1}\delta$.

在本文中，带或不带下标的字母 C 都表示只跟维数 n 有关的常数，出现在不同位置的 C 不一定表示同一个值.

2　定理 1 的证明

选取一个适当的函数作为磨光子，比如

$$\eta(x):=\begin{cases} C_1\exp\big(-1/(1-|x|^2)\big), & \text{如果}\quad |x|\le 1,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

选择常数 C_1 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\mathrm{d}x=1.$$

定义 $\eta_\epsilon(x):=\epsilon^{-n}\eta(\epsilon^{-1}x)$，设 Ω 是一个 (δ,R)-Reifenberg 区域，定义

$$\chi_\Omega(x):=\begin{cases} 1, & \text{如果}\quad x\in\Omega,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

用 η_ϵ 与 χ_Ω 做卷积，记

$$\chi_\epsilon(x):=(\chi_\Omega*\eta_\epsilon)(x)=\int_{B_\epsilon(x)\cap\Omega}\eta_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y.$$

那么 $\chi_\epsilon(x)$ 是光滑函数，记

$$L_\epsilon:=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\chi_\epsilon(x)=\frac{1}{2}\Big\},\quad \Omega_\epsilon:=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\chi_\epsilon(x)>\frac{1}{2}\Big\}.$$

引理1　对于 $\epsilon\le R/2$，我们有

$$HD(L_\epsilon,\partial\Omega)<4\delta\epsilon. \tag{7}$$

证明　对任意一点 $x\in L_\epsilon$，设 $d:=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$，$y\in\partial\Omega$，使得 $d=|y-x|$. 显然 $d<\epsilon$，因为否则 $\chi_\epsilon(x)=0$，或者 $=1$. 记

$$B_{2\epsilon}^+(y):=\big\{z:\big\langle z-(y-2\epsilon\delta\vec{n}(y,2\epsilon)),\,\vec{n}(y,2\epsilon)\big\rangle<0\big\}\cap B_{2\epsilon}(y),$$

$$B_{2\epsilon}^-(y):=\big\{z:\big\langle z-(y+2\epsilon\delta\vec{n}(y,2\epsilon)),\,\vec{n}(y,2\epsilon)\big\rangle>0\big\}\cap B_{2\epsilon}(y),$$

$$B_{2\epsilon}^0(y):=B_{2\epsilon}(y)-(A_1\cup A_2),$$

$$T_{2\epsilon}^+(y):=\partial B_{2\epsilon}^+(y)\cap B_{2\epsilon}(y).$$

那么，我们有 $x\in B^0_{2\epsilon}(y)$，且 $d\le 4\delta\epsilon$. 因为若 $x\in B^+_{2\epsilon}(y)$，则

$$\chi_\epsilon(x)=\int_{B_\epsilon(x)\cap\Omega}\eta_\epsilon(z-x)\mathrm{d}z\ge\int_{B_\epsilon(x)\cap B^+_{2\epsilon}(y)}\eta_\epsilon(z-x)\mathrm{d}z>\frac{1}{2},$$

第一个不等式我们用到条件(1). 同样地，若 $x\in B^-_{2\epsilon}(y)$，则 $\chi_\epsilon(x)<\frac{1}{2}$. 因此，$x\in B^0_{2\epsilon}(y)$，于是 $B_{4\epsilon\delta}(x)\cap\partial\Omega\neq\emptyset$，这意味着 $d\le 4\delta\epsilon$.

另一方面，对任意一点 $y\in\partial\Omega$，$B^+_{2\epsilon}(y)\subset\Omega$，而 $B^-_{2\epsilon}(y)\subset\Omega^{\mathrm{c}}$. 因此

$$\chi_\epsilon\big(y-\epsilon\vec{n}(y,2\epsilon)\big)>\frac{1}{2},\quad \chi_\epsilon\big(y+\epsilon\vec{n}(y,2\epsilon)\big)<\frac{1}{2}.$$

由 χ_ϵ 的连续性，存在 $-1<\tau<1$，使得 $\chi_\epsilon(y+\tau\epsilon\vec{n}(y,2\epsilon))=\frac{1}{2}$. 而事实上，由前面的分析知 $|\tau|<4\delta$.

引理2 设 $e_n=-\vec{n}(y,2\epsilon)$，$e$ 是任何垂直于 e_n 的单位向量. 若 δ 充分小，那么对于任意 $x\in L_\epsilon$，我们有导数估计

$$\frac{\partial}{\partial e_n}\chi_\epsilon(x)\ge C_2\epsilon^{-1},\quad \Big|\frac{\partial}{\partial e}\chi_\epsilon(x)\Big|\le C_3\delta\epsilon^{-1},\quad \Big|\frac{\partial^2}{\partial e^2}\chi_\epsilon(x)\Big|\le C_4\delta\epsilon^{-2},$$

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial e\partial e_n}\chi_\epsilon(x)\Big|\le C_5\delta\epsilon^{-2},\quad \Big|\frac{\partial^2}{\partial e_n^2}\chi_\epsilon(x)\Big|\le C_4\epsilon^{-2}.$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial e_n}\chi_\epsilon(x)&=\Big(\chi_\Omega*\frac{\partial}{\partial e_n}\eta_\epsilon\Big)(x)=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial e_n}\eta_\epsilon(x-z)\mathrm{d}z\\&=\int_{B^+_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(x)}\frac{\partial}{\partial e_n}\eta_\epsilon(x-z)\mathrm{d}z+\int_{\Omega\cap B^0_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(\bar{x})}\frac{\partial}{\partial e_n}\eta_\epsilon(x-z)\mathrm{d}z:=I_1+I_2,\end{aligned}$$

$$I_1=\int_{T^+_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(x)}\eta_\epsilon(x-s)\mathrm{d}s\ge\int_{T^+_{2\epsilon}(y)\cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)}\eta_\epsilon(x-s)\mathrm{d}s\ge C_2'\epsilon^{-n}\cdot C_2''\Big(\frac{\epsilon}{2}\Big)^{n-1}=C_2'''\epsilon^{-1},$$

$$|I_2|\le\int_{B^0_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(x)}\Big|\frac{\partial}{\partial e_n}\eta_\epsilon(x-z)\Big|\mathrm{d}z\le C_2^{(4)}\epsilon^{-n}\epsilon^{-1}\cdot C_2^{(5)}\delta\epsilon^n=C_2^{(6)}\delta\epsilon^{-1},$$

其中 y 是 $\partial\Omega$ 中距离 x 最近的点之一，I_1 项估计的第一个等式用到 Green 公式. 若 δ 足够小，使得 $C_2^{(6)}\delta<C_2'''/2$，记 $C_2=C_2'''/2$，就证明了第一个估计.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial e}\chi_\epsilon(x)&=\Big(\chi_\Omega*\frac{\partial}{\partial e}\eta_\epsilon\Big)(x)=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial e}\eta_\epsilon(x-z)\mathrm{d}z\\&=\int_{B^+_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(x)}\frac{\partial}{\partial e}\eta_\epsilon(x-z)\mathrm{d}z+\int_{\Omega\cap B^0_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(x)}\frac{\partial}{\partial e}\eta_\epsilon(x-z)\mathrm{d}z:=I_3+I_4,\end{aligned}$$

$$I_3=0,\quad (\text{由 Green 公式}),$$

$$|I_4|\le\int_{B^0_{2\epsilon}(y)\cap B_\epsilon(x)}\Big|\frac{\partial}{\partial e}\eta_\epsilon(x-z)\Big|\mathrm{d}z\le C_2^{(6)}\delta\epsilon^{-1},\quad (\text{同 } I_2 \text{ 的估计}).$$

记 $C_3:=C_2^{(6)}$，就证明了第二个估计. 其它三个可类似证明.

由隐函数定理知，L_ϵ是一个光滑的超曲面．设x, y和局部标架如引理2的假设，那么在$B_\epsilon(y)$内，我们可以设L_ϵ是一个$n-1$元函数$x_n = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1}) := \varphi(x_T)$的图像．

引理3 对于任意的$n-1$维单位向量$\hat{e}$，我们有

$$\left|\frac{\partial}{\partial \hat{e}}\varphi(x_T)\right| < \frac{C_3}{C_2}\delta, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2}\varphi(x_T)\right| \le C_6\delta\epsilon^{-1}.$$

证明 由隐函数定理

$$\frac{\partial}{\partial \hat{e}}\varphi(x_T) = -\frac{\frac{\partial}{\partial e}\chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T))}{\frac{\partial}{\partial e_n}\chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T))},$$

利用引理2的前两个导数估计，就得到

$$\left|\frac{\partial}{\partial \hat{e}}\varphi(x_T)\right| < \frac{C_3}{C_2}\delta.$$

同样地，φ的2阶导数可以写为

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2}\varphi(x_T) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial e^2}\chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T)) + \frac{\partial^2}{\partial e_n^2}\chi_\epsilon \cdot [\frac{\partial}{\partial \hat{e}}\varphi(x_T)]^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial e \partial e_n}\chi_\epsilon \cdot [\frac{\partial}{\partial \hat{e}}\varphi(x_T)]}{\frac{\partial}{\partial e_n}\chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T))}.$$

将相应的导数估计代入，就得到

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2}\varphi(x_T)\right| \le \frac{C_4\delta\epsilon^{-2} + C_5\epsilon^{-2}\cdot(\frac{C_3}{C_2})^2\delta^2 + 2C_4\delta\epsilon^{-2}\cdot\frac{C_3}{C_2}\delta}{C_2\epsilon^{-1}} \le \frac{2C_4\delta\epsilon^{-2}}{C_2\epsilon^{-1}} = C_6\delta\epsilon^{-1},$$

其中第二个不等式用到δ充分小．

引理3表明超曲面L_ϵ在其上任意一点和任意切方向上的主曲率不超过$C_6\delta\epsilon^{-1}$．另$\epsilon = 2^{-k}R$, $k = 1, 2, \cdots$，并记$\Omega_k = \Omega_{2^{-k}R}$，就证明了定理1．

3 定理2的证明

用$\frac{3}{4}$或$\frac{1}{4}$水平集代替$\frac{1}{2}$水平集，就分别得到区域的内逼近和外逼近．我们只证明内逼近的部分，外逼近的证法完全相同．定义

$$L_\epsilon^+ := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_\epsilon(x) = \frac{3}{4}\right\}, \quad \Omega_\epsilon^+ := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_\epsilon(x) > \frac{3}{4}\right\}.$$

设$0 < C_7 < 1$，使得

$$\int_{\{x_n < C_7\}} \eta(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

若δ充分小，对于$\epsilon \le R/2$，我们有

$$(C_7 - C_8\delta)\epsilon < HD(L_\epsilon^+, \partial\Omega) < (C_7 + C_8\delta)\epsilon < \epsilon. \tag{8}$$

证明 同引理1的证明类似．

由距离的上下界估计(8)，我们还能得到$\Omega_\epsilon^+ \subset \Omega$和$\Omega_\epsilon^+ \subset \Omega_{\epsilon/2}^+$，只要$\frac{C_7+C_8\delta}{2} < C_7 - C_8\delta$．另外，引理2，从而引理3的结论对$L_\epsilon^+$仍然成立．值得注意的是$I_1$的下界估计．对于$x \in L_\epsilon^+$，只要$\delta$充分小，$T_{2\epsilon}^+(y)$在$B_\epsilon(x)$内的部分的半径仍然大于

$$\sqrt{1-(C_7+C_8\delta)^2}\,\epsilon > C\epsilon,$$

将这一部分缩小一半，则η_ϵ在其上有下界$C\epsilon^{-n}$．

最后，另$\epsilon = 2^{-k}R$, $k = 1, 2, \cdots$，并记$\Omega_k^i = \Omega_{2^{-k}R}^+$，就证明了定理2．

参考文献:

[1] Reifenberg E R. Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type[J]. Acta Mathematica, 1960, 104: 1-92

[2] Toro T. Doubling and flatness: geometry of measures[J]. Notices of the American Mathematical Society, 1997, (9): 1087-1094

[3] David G, Toro T. Reifenberg flat metric spaces, snowballs, and embeddings[J]. Mathematische Annalen, 1999, 315(4): 641-710

[4] Morrey C B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations[M]. New York: Springer, 1966

[5] Hong G H, Wang L H. A geometric approach to the topological disk theorem of Reifenberg[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2007, 232(2): 321-339

[6] Kenig C E, Toro T. Harmonic measure on locally flat domains[J]. Duke Mathematical Journal, 1997, 87(3): 509-551

[7] Kenig C E, Toro T. Free boundary regularity for harmonic measures and Poisson kernels[J]. Annals of Mathematics, 1999, 150(2): 369-454

[8] Byun S, Wang L H. Elliptic equations with BMO coefficients in reifenberg domains[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(10): 1283-1310

[9] Byun S, Wang L H. Elliptic equations with BMO nonlinearity in Reifenberg domains[J]. Advances in Mathematics, 2008, 219(6): 1937-1971

A Smoothing Method for Reifenberg Domains

HONG Guang-hao,   WANG Li-he

(Department of Applied Mathematics, College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: Reifenberg domains satisfy a kind of locally flat condition at any boundary point and at any scale. We provide a method of smoothing Reifenberg domains by considering the upper level sets of mollified characteristic functions of the domains. Our method includes interior and exterior approximations.

Keywords: Reifenberg domains; mollification; level sets

Received: 03 Apr 2009.   **Accepted:** 06 Nov 2009.